Студенческие олимпиады по дифференциальным уравнениям на механико–математическом факультете МГУ

Асташова И.В.

ast@diffiety.ac.ru

МГУ им. М.В. Ломоносова, мехмат, кафедра дифференциальных уравнений

Пермь, 20 мая 2016

Каждый год в весеннем семестре, начиная с 2003 года, кафедрой дифференциальных уравнений проводятся две олимпиады по дифференциальным уравнениям:

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям для студентов 2–го курса.

Олимпиада по дифференциальным уравнениям с частными производными для студентов 3–го курса.

Цели

- привлечение интереса студентов к предмету;

- повышение творческой активности студентов, которым представляется возможность проявить себя при решении нестандартных задач;

- распределение проявивших (и не проявивших) себя студентов на кафедру дифференциальных уравнений.

Результаты

- Победители олимпиад получают отличные оценки по соответствующему предмету.

- Победители и призеры приглашаются на отборочный тур для формирования команды МГУ на международную студенческую математическую олимпиаду.

Авторы задач

И.В.Асташова, А.В.Боровских, В.В.Быков, А.Ю.Горицкий, Т.О.Капустина, А.А.Коньков, О.С.Розанова, Н.Х.Розов, М.С.Романов, И.Н.Сергеев, И.В.Филимонова, А.В.Филиновский, А.С.Шамаев.

Примеры задач

Задача 9. (2013) Найти множество на плоскости (x, t), в котором однозначно определено решение задачи Гурса, и получить явный вид решения:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

$$u(x, 0) = x^2, \;\; x \geq 0, \qquad u_t(x, 0) = 2x,$$

$$u(x, 6x) = 49x^2 + x, \;\; 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq t \leq 6.$$

Задача 11. (2016) Пусть $y(x)$ – решение уравнения

$$y''' + p(x)y = 0$$

с непрерывной отрицательной на $[x_0, \infty)$ функцией $p(x)$, удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y'(x_0) = 0, y''(x_0) > \; 0$. Доказать, что $y(x)$ возрастает на (x_0, ∞).

Работы В.А.Кондратьева по качественной теории ОДУ.

1. Кондратьев В.А. Элементарный вывод необходимого и достаточного условия неколеблемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка // УМН, 1957, т. 12, N 3, с. 159–160.
2. Кондратьев В.А. О колеблемости решения линейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядка // ДАН СССР, 1958, т. 118, N 1, с.22–24.
3. Кондратьев В.А. О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка // Труды ММО, 1959, т. 8, с. 259–281.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(y) \equiv y^{(n)} + q(x)y = 0, \tag{1}$$

где $n \geq 2$, $q(x)$ — непрерывная функция.

Определение. Решение уравнения (1) называется неколеблющимся на интервале (a, b) ($-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$), если оно имеет на этом интервале не более чем $n - 1$ нуль.

Теорема 1 (критерий Кондратьева). (см. [1]) Пусть $n = 2$. Для неколеблемости решений уравнения (1) на (a, b) необходимо и достаточно существование на (a, b) положительной дважды непрерывно дифференцируемой функции $u(x)$ такой, что $L(u) \leq 0$. Из этой теоремы при надлежащем выборе функции $u(x)$ легко следуют известные критерии колеблемости Ельшина, Кнезера и Беллмана.

Критерий неколеблемости Ельшина. Для неколеблемости решений уравнения (1) на (a,b) необходимо и достаточно существование на (a,b) такой дифференцируемой функции $\theta(x)$, что $\theta'(x)+\theta^2(x)+q(x)\leqslant 0$, $x\in(a,b)$.
$\Big($Следует из критерия Кондратьева при $u=\exp\int\limits_{x_0}^{x}\theta(s)ds.\Big)$

Критерий неколеблемости Кнезера. Для неколеблемости решений уравнения (1) на (a,b) необходимо и достаточно, чтобы $q(x)\leqslant\frac{1}{4x^2}$ на (a,b).
(Следует из критерия Кондратьева при $u=\sqrt{x}$.)

Критерий неколеблемости Беллмана. Для неколеблемости решений уравнения (1) на (a,b) необходимо и достаточно, чтобы $q(x)\leqslant\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4x^2\ln^2 x}+\frac{1}{4x^2\ln^2\ln x}+\dots$ на (a,b).
(Следует из критерия Кондратьева при $u=\sqrt{x\ln x\ln\ln x}$.)

Доказаны аналоги теорем Штурма для уравнений третьего и четвертого порядков.

Теорема 3. (см. [2]) Пусть в уравнении (1) $n = 3$, $q(x)$ — непрерывная на $[a, +\infty)$ функция, не меняющая знака. Тогда между любыми двумя последовательными нулями одного решения лежит не более 2 нулей другого решения (2 лежать могут).

Теорема 4. (см. [3]) Пусть в уравнении (1) $n = 4$, $q(x) > 0$. Тогда между любыми двумя последовательными нулями одного решения лежит не более 4 нулей другого решения (4 лежать могут). Если $n = 4$, $q(x) < 0$, то между любыми двумя последовательными нулями одного решения лежит не более 3 нулей другого решения (3 лежать могут).

Замечание. В теоремах 3, 4 существенно, что $q(x)$ не меняет знака. В случае, когда $q(x)$ меняет знак, между двумя последовательными нулями одного решения могут лежать сколь угодно много нулей другого решения.

Литература

1.
Асташова И. В., Шамаев А. С., Капустина Т. О. Студенческие олимпиады по дифференциальным уравнениям на механико–математическом факультете МГУ // Современные проблемы математики и механики. — Т. 9 из Математика, Механика. Выпуск 3. Дифференциальные уравнения. К 80-летию механико-математического факультета МГУ. — Изд-во Московского университета Москва, 2016.
2.
http://new.math.msu.su/diffur/olympR.htm

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!