МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том IX

Математика

Выпуск 3

**К 80-летию
механико-математического факультета МГУ
Дифференциальные уравнения**

2014 год

УДК
ББК
С

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ. Том IX. Математика. Выпуск 3. К 80-летию механико-математического факультета. Дифференциальные уравнения / Под редакцией И.В. Асташовой и И.Н. Сергеева. — М.: Издательство Попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2014. — X с.

ISBN

Выпуск посвящается

80-летию Механико-математического факультета МГУ

ISBN

Предисловие

31 мая 2013 года механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова отмечает своё 80-летие.

В настоящем сборнике представлены работы сотрудников и воспитанников кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ, посвященные этому юбилею.

Студенческие олимпиады по дифференциальным уравнениям на механико–математическом факультете МГУ

Асташова И.В.[1], Капустина Т.О.[2], Шамаев А.С.[3]

Кафедра дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова представляет опыт проведения студенческих олимпиад по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными.

Цель данной статьи — поделиться опытом сотрудников кафедры дифференциальных уравнений механико–математического факультета МГУ в проведении студенческих олимпиад по дифференциальным уравнениям. Они проводятся кафедрой с 2003 года и пользуются неизменной популярностью среди студентов.

Каждый год в весеннем семестре проводятся две олимпиады по дифференциальным уравнениям: олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям для студентов 2–го курса и олимпиада по дифференциальным уравнениям с частными производными для студентов 3–го курса. Цели, которые ставят организаторы, состоят прежде всего в привлечении интереса студентов к предмету и в повышении творческой активности студентов, которым представляется возможность проявить себя при решении нестандартных задач.

Вариант олимпиады состоит из большого количества задач (около десяти). Каждая задача, в зависимости от сложности, оценивается определенным количеством баллов (эти баллы указаны в вариантах). Задача студента — набрать максимальное количество баллов. Варианты составляются так, что необходимые для решения методы охватывают все основные понятия курса.

С каждым годом интерес студентов к олимпиадам возрастает. Число участников олимпиад за 10 лет удвоилось по сравнению с первыми олимпиадами. Уже несколько лет в каждой из олимпиад и по ОДУ, и по УрЧП принимают участие около 100 студентов. Причем это студенты не только МГУ, но и других институтов Москвы и даже из других городов. Например, в олимпиадах регулярно и успешно участвуют студенты Московского

[1]Асташова Ирина Викторовна, iastashova@mesi.ru, профессор, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[2]Капустина Татьяна Олеговна, kapustina-tatiana@yandex.ru, доцент, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

[3]Шамаев Алексей Станиславович, sham@rambler.ru, профессор, кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова.

государственного строительного университета и Тульского государственного университета.

Результаты студентов также приятно удивляют организаторов олимпиад. Вопреки ожиданиям организаторов, находятся студенты, решившие более двух третей всего задания. Также интересно отметить, что многие студенты, занявшие призовые места на втором курсе, через год становятся победителями олимпиады третьего курса. Более того, есть старшекурсники, которые, даже закончив изучение ОДУ и УрЧП, сохраняют интерес к нашим олимпиадам, участвуют и побеждают.

Олимпиады по ОДУ и УрЧП, наряду с олимпиадами по другим предметам, являются этапом всемехматовской олимпиады. Победители этих олимпиад обычно получают отличные оценки по соответствующему предмету. Кроме этого, победители и призеры приглашаются на отборочный тур для формирования команды МГУ на международную студенческую математическую олимпиаду.

Организаторы олимпиад по дифференциальным уравнениям предполагают и в дальнейшем проводить подобные конкурсы на механико–математическом факультете МГУ, считая, что они способствуют улучшению подготовки студентов по данной специальности и развитию самостоятельного творческого мышления студентов мех–мата — будущих математиков.

Приведем результаты нескольких олимпиад.

2013 год. Олимпиада по ОДУ, I премия: Великанов Д., Гаража А., Почеревин Р.; II премия: Горденко, Тузов К., Саркисян Г., Корчемкина Т., Брюхова Н.

Олимпиада по УрЧП, I премия: Попова С.; II премия: Горбань С., Степанова А., Алешкин, Солоницын А., Колесникова, Покровский Ф., Высоканов.

2014 год. Олимпиада по ОДУ, I премия: Феоктистов А., Рухович А., Тильга С.; II премия: Назаров В., Саитбаталов И., Фомин Д., Иванов А., Бережной А., Болотников А., Первых С., Степанова М., Запрягаев А., Ахмедов М., Московский Б.; III премия: Кибкало В., Трифонов А., Давыдов А., Шкарина А., Горячкин В., Крохмаль Н., Коробко Е., Новиков В., Кравцов Д., Назмутдинов А., Дуков А.

Олимпиада по УрЧП, I премия: Богданов Д., Подольский А., Еремин Д., Великанов Д.; II премия: Царегородцев, Гаража А., Новиков Г., Леонов, Почеревин Р., Лукина А., Мелихян М.; III премия: Абель Т., Толмачева О., Торосян А., Ермишкина, Семенова Н., Черная Т., Волобой, Тугова Е., Филатов Д., Потапова Е., Стасюк Т., Толстов И., Дулясов А.

2015 год. Олимпиада по ОДУ, I премия: Туров; II премия: Хазиева Л., Кузнецова А., Заславский О., Стасенко Р., Васильев М., Алексеев Г.; III премия: Фадеева А., Полещук М., Карпов, Злобина А.

Олимпиада по УрЧП, I премия: Почеревин Р., Ахмедов М., Зозуленко М., Дуков А., Горячкин В.; II премия: Коробко Е., Тихонова М., Каданер А., Крохмаль Н., Иванов А., Насибян С., Рухович А., Кравцов Д., Феоктистов А., Джуган А.; III премия: Степанова М., Сагдеев А., Мусабаева А., Саакян В., Дмитриев Н., Шеховцов А., Смирнова А., Земцова Е., Чеботаева В.

В данной статье мы приводим варианты олимпиад по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям с частными производными за 2009—2015 годы. Авторы задач этих олимпиад — сотрудники кафедры дифференциальных уравнений механико–математического факультета МГУ И.В.Асташова, А.В.Боровских, В.В.Быков, А.Ю.Горицкий, Т.О.Капустина, А.А.Коньков, О.С.Розанова, Н.Х.Розов, М.С.Романов, И.Н.Сергеев, И.В.Филимонова, А.В.Филиновский, А.С.Шамаев.

Олимпиады по ОДУ и УРЧП 2003—2008 года приведены в [3]. Некоторые варианты с указаниями к решениям приведены в [2]. Олимпиады по УрЧП с решениями некоторых задач приведены в [1].

ОЛИМПИАДЫ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2009 г.

1. Решить задачу $\dot{x} = \frac{t-\ln(1+t)}{t^2(1+t)}\,x, \quad t > 0, \qquad \lim\limits_{t\to+0} x(t) = e.$

2. До какой максимальной амплитуды можно раскачать маятник за время от 0 до 1 из положения равновесия силой $f(t)$, имеющей нулевое среднее по отрезку времени $[0,1]$?

3. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ — произвольная неограниченная последовательность чисел. Может ли она быть последовательностью нулей некоторого решения какого-либо уравнения $\ddot{x} + a(t)\,x = 0$, где $a(t)$ — гладкая функция?

4. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} + \omega^2(t)\,x = 0$, где $\omega(t)$ — гладкая функция. Пусть $x(t)$ — некоторое решение этого уравнения. Определим множество $X = \{\tilde{x} \in \mathbb{R} \mid \exists\, t:\ x(t) = \tilde{x}\}$, т. е. множество точек, через которые проходит траектория $x(t)$. Предположим, что мы можем измерить функцию $\omega(t)$ с любой степенью точности $\varepsilon > 0$ (но не абсолютно точно), а начальные условия $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = x_1$ нам известны. Можно ли по этим данным построить множество $X_{\delta(\varepsilon)}$, представляющее собой $\delta(\varepsilon)$-окрестность множества X, где $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$?

5. Существует ли линейное однородное уравнение 2009-го порядка, некоторая фундаментальная матрица которого удовлетворяет равенству $Y(t,0) = E$:

   (a) при всех $t \in \mathbb{Q}$;

   (b) при всех $t \in \mathbb{Z}$?

6. Можно ли найти общее решение уравнения Риккати $y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$, если известны три его различных частных решения y_1, y_2, y_3?

7. (*Вычисление экспоненты методом А. Ф. Филиппова*) Найдите скалярные функции p и q от двух переменных каждая, удовлетворяющие для любой квадратной матрицы A второго порядка с собственными значениями λ_1, λ_2 равенству

$$e^A = p(\lambda_1,\lambda_2)\cdot E + q(\lambda_1,\lambda_2)\cdot A.$$

8. Докажите, что если какое-либо решение уравнения $\ddot{y} + r(t)y = 0$ $(t \geq 0)$ с непрерывным ограниченным коэффициентом r ограничено на полупрямой, то его производная — тоже.

9. Есть предположение, что *переживаемое* человеком время вблизи настоящего момента t воспринимается им не как абсолютное, а как его отношение ко всему времени $x(t)$, *прожитому* этим человеком к настоящему моменту. Исходя из этого предположения, составьте дифференциальное уравнение для функции $x(t)$ и решите его.

10. Рассматривается система дифференциальных уравнений, записанная в полярной системе координат:
$$r' = rf(r^2), \quad \varphi' = 1,$$
где f— гладкая функция. Предполагается, что эта система имеет предельный цикл. Будет ли решение, отвечающее этому предельному циклу:
— устойчиво по Ляпунову?
— асимптотически устойчиво?

11. Доказать, что каждое решение уравнения $y'' + e^x\, y = 0$ ограничено при $x \to \infty$.

12. Привести пример уравнения $y' = f(x, y)$, с непрерывной $f(x, y)$ на всей плоскости, такой, чтобы какова бы ни была $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, существовало бы только одно решение в окрестности x_0, такое, что $y(x_0) = y_0$, и чтобы существовало бы по крайней мере два решения такие, что $y(0) = 0$.

13. Пусть нулевое решение системы $\dot{x} = A\, x$ устойчиво по Ляпунову. Что можно сказать об устойчивости нулевого решения системы $\dot{x} = \left(A + \frac{1}{1+t^2}\, E\right)\, x$?

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2010 г.

1. Для уравнения
$$\left(x^2 + 2x + 1\right) y'' + (x + 1)y' + y = 0$$
найти первый положительный корень решения, удовлетворяющего условию $y(0) = 0$.

2. Устойчивы ли нулевые решения уравнений
$$2a) \quad y'' + iy' + y = 0,$$
$$2b) \quad y'' + iy' - y = 0?$$

3. Доказать, что все решения уравнения
$$y'' + y^3 = 0$$
— периодические.

4. Доказать, что не существует точки накопления нулей функции $y^{(k)}(x)$, $0 \leq k \leq n-1$, где $y(x)$ — решение уравнения
$$y^{(n)} + a(x)y = 0,$$
$n \geq 1$, $a(x)$ — непрерывна и имеет не более чем конечное число нулей.

5. Существует ли решение уравнения $y^{IV} + a(x)y = 0$ ($a(x)$ — положительная непрерывная функция), имеющее 2 двукратных нуля, то есть удовлетворяющее для некоторых $x_1 \neq x_2$ условиям $y(x_1) = y'(x_1) = y(x_2) = y'(x_2) = 0$?

6. Исследовать на устойчивость все решения системы
$$\begin{cases} \dot{x} = & -y\sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = & x\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

7. Докажите, что если какое-либо решение уравнения
$$\ddot{y} + r(t)y = 0, \quad t \geq 0$$
с непрерывным ограниченным коэффициентом $r(t)$ ограничено на полупрямой, то его производная тоже ограничена.

8. Какое наибольшее количество различных значений может принимать величина
   (a) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|x(t)|$,
   (b) $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|x(t)|$

   на ненулевых решениях системы вида
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & b(t) \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2?$$

9. С каждым решением $x(t)$ уравнения $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, не обращающимся в нуль вместе со своей производной, свяжем подвижный луч на фазовой плоскости, начинающийся в точке $(0,0)$ и проходящий через точку $(x(t), \dot{x}(t))$. Существует ли такая функция $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$, что все такие лучи, находящиеся в:
   (a) верхней,
   (b) правой

   полуплоскости, с ростом t все время поворачиваются против часовой стрелки?

10. Отклонение математического маятника под действием силы f от положения равновесия описывается уравнением $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$. До какого максимального положения в точке $t = 1$ можно отклонить математический маятник из положения равновесия $t = 0$ за время от 0 до 1 силой $f(t)$, имеющей нулевое среднее по отрезку времени $[0,1]$ $\left(\int_0^1 f(t)dt = 0\right)$, если $x(0) = \dot{x}(0) = 0$?

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2011 г.

1. У дифференциального уравнения $\dot{x} = ax$, $a > 0$, все решения, кроме $x \equiv 0$, неограничены при $t > 0$. Можно ли добиться существования ограниченного нетривиального решения, добавив к правой части bx^m, где $b > 0$, $m \in \mathbb{N}$, и рассматривая уравнение $\dot{x} = ax + bx^m$ при $t > 0$?

2. Рассматривается уравнение Ньютона $\ddot{x} = -x^3 + x^n$, $n \in \mathbb{N}$. При каких n положение равновесия $x_0 = 0$ устойчиво по Ляпунову?

3. Оценить снизу количество нулей решения уравнения $\ddot{x} + tx = 0$ на отрезке $[-100, 100]$.

4. Рассматривается математический маятник, управляемый малой силой $u(t)$, $|u(t)| < \varepsilon : \ddot{x} + \omega^2 x = u, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1$. Можно ли привести маятник в положение покоя за конечное время, то есть верно ли, что для любых x_0, x_1, $\varepsilon > 0$, существует такая $u(t)$, $|u| \leq \varepsilon$, что соответствующее решение $x(t)$ удовлетворяет условиям $x(T) = \dot{x}(T) = 0$ при некотором $T > 0$? Если можно, оценить это время через $\varepsilon, \omega, x_0, x_1$.

5. Легко видеть, что все решения уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ограничены. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая гладкая функция $a(t), |a(t)| < \varepsilon$, что уравнение $\ddot{x} + (\omega^2 + a(t))x = 0$ имеет неограниченные при $t > 0$ решения.

6. Известно, что $x(t, t_0)$ — решение задачи Коши
$$\dot{x} = x - e^{-2t}x^3 + e^t, \quad x|_{t=t_0} = 1,$$
— в случае $t_0 = 0$ имеет вид $x(t, 0) = e^t$. Найдите производную $u(t)$ решения $x(t, t_0)$ по начальному моменту t_0 при $t_0 = 0$ (зная, что она существует).

7. Пусть система $\dot{x} = f(x)$ $(f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2))$ на плоскости имеет изолированную особую точку $(0, 0)$, причем тем же свойством обладает и ее линеаризация $\dot{u} = Au$ в этой точке. Является ли какое-либо из следующих двух утверждений следствием другого:
а) все фазовые кривые исходной системы — циклы, окружающие особую точку;
б) все фазовые кривые линеаризованной системы — циклы, окружающие особую точку?

8. Можно ли систему $\dot{x_1} = a_{11}(t)\, x_1 + a_{12}(t)\, x_2$, $\dot{x_2} = a_{21}(t)\, x_1 + a_{22}(t)\, x_2$, заменой переменных $y_1 = h_{11}(t)\, x_1 + h_{12}(t)\, x_2$, $y_2 = h_{21}(t)\, x_1 + h_{22}(t)\, x_2$, привести к виду $\dot{y_1} = 0$, $\dot{y_2} = 0$?

9. Опишите все возможные типы поведения при $t \to +0$ решений уравнения $t^2\, \ddot{x} + at\dot{x} + bx = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

10. Найти решение уравнения $\dot{x}(t) = x(\pi)x(t)$.

11. Является ли неограниченным непродолжаемое (максимально продолженное) вправо решение задачи Коши: $\dot{x} = x^2 + 2yz$, $\dot{y} = y^2 + 2xz$, $\dot{z} = z^2 + 2xy$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$?

12. Известно, что некоторая фундаментальная матрица системы
$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$
при всяком $t \in \mathbb{R}$ ортогональна. Верно ли, что при всяком $t \in \mathbb{R}$ матрица $A(t)$ кососимметрична?

13. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y''' + p(x)y = 0$, где $p(x) < 0$. Пусть $y(x)$ – такое его решение, что $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y''(x_1) > 0$ в некоторой точке $x_1 \in \mathbb{R}$. Доказать, что $y(x)$ возрастает при всех $x > x_1$.

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2012 г.

1. Докажите, что для одного (какого именно?) из двух уравнений $y' = \pm y^2 + x^2$ решение с начальным условием $y(0) = 0$ продолжается на всю полуось $x \geq 0$, а для другого — нет.

2. Известно, что *если все коэффициенты нормированного (т. е. с единичным старшим коэффициентом) линейного уравнения непрерывны на некотором интервале, то все его решения продолжаются на весь этот интервал.* Верно ли аналогичное утверждение для отрезка?

3. Найдите матрицу A системы $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^2$, если некоторого ее решение $x(\cdot)$ удовлетворяет условиям
$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Для изолированной особой точки неизвестной линейной автономной системы на плоскости нарисованы все ее n собственных (определяемых собственными векторами) прямых (при $n = 2$ — седло или узел, при $n = 1$ — вырожденный узел, а при $n = 0$ — центр или фокус соответственно), а также вектор фазовой скорости в некоторой не лежащей на них точке плоскости. При каких значениях n по этому рисунку можно однозначно определить, каков тип особой точки и является ли она устойчивой?

5. Докажите, что уравнение
$$y'' - (1 + e^{-x})y = 0$$
имеет два ненулевых решения y_1 и y_2, удовлетворяющие условиям $\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} \to 1$ и $\frac{y_2'(x)}{y_2(x)} \to -1$ при $x \to \infty$.

6. При $n = 1$ для любого векторного поля $f \in \mathrm{C}(G)$ в области $G \subset \mathbb{R}^n$ верно следующее:

   а) *если* $f(x_0) \neq 0$
   или

   б) *если* $f(x_0) = 0$ *и существует производная* $f'(x_0)$,
   то для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ *через точку* (t_0, x_0) *проходит локально единственная интегральная кривая.* Верны ли эти признаки локальной единственности при $n > 1$?

7. При любом ли $n \in \mathbb{N}$ верно, что: *если данные* n *скалярных* n *раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на общем интервале, не являются линейно зависимыми ни на каком меньшем интервале, то их определитель Вронского хотя бы в одной точке отличен от нуля*?

8. Пусть $\frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования в пространстве многочленов от переменной x степени меньше 2012. Найдите все собственные значения оператора $\exp\left(\frac{\pi}{2}\frac{d}{dx}\right)$ и их кратности.

9. Все собственные значения матрицы $A(t)$, непрерывно зависящей от t, действительны и не превосходят -1 при всех $t \in \mathbb{R}$. Следует ли отсюда, что нулевое решение линейной неавтономной системы $\dot{x} = A(t)\,x$

   а) асимптотически устойчиво?

   б) устойчиво?

10. Можно ли так подобрать правую часть уравнения
$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}), \quad t \in \mathbb{R},$$
чтобы из любой начальной точки $(x(0), \dot{x}(0))$ фазовая траектория приходила бы в точку (0,0):

    a) за бесконечное время;

    b) за конечное время?

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2013 г.

1. Могут ли все ненулевые решения системы
$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad f(0) = 0,$$
быть неустойчивыми по Ляпунову, если нулевое решение этой системы
   1) неустойчиво;
   2) устойчиво;
   3) асиптотически устойчиво

   по Ляпунову?

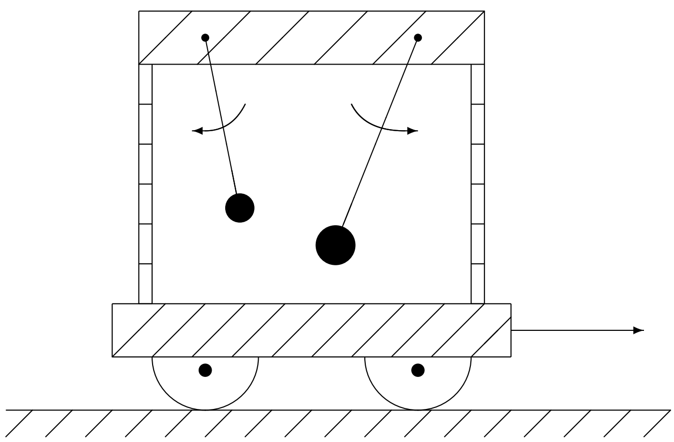
2. Часы с маятником (совершающим малые колебания, без трения) спешили на 2 ч в сутки. Когда грузик на маятнике опустили на 1 см, часы стали спешить на 1 ч в сутки. На сколько см еще нужно опустить грузик, чтобы часы шли точно?

3. Найти кривую, у которой длина отрезка любой ее касательной, заключенного между координатными осями, равна фиксированному числу $a > 0$.

4. Существует ли у уравнения $\ddot{\varphi} + \sin\varphi = 0$ такое решение ϕ, для которого функция $t \mapsto \sin\phi(t)$ была бы непериодической?

5. Пусть отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу C^∞. Векторнозначная функция $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ является решением уравнения $y' = f(y)$ с начальными условиями $y(0) = 0$ и удовлетворяет условию $|y(x)| \to \infty$ при $x \to 1 - 0$. Следует ли отсюда, что при достаточно малых y_0 решение рассматриваемого уравнения с начальными условиями $y(0) = y_0$ не может быть определено для всех $x > 0$?

6. Можно ли так двигать тележку с двумя маятниками
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = u(t), \quad x_1(0) = x_1^0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1^0 \\[2ex] \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = u(t), \quad x_2(0) = x_2^0, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_2^0 \end{cases}$$
(правильно подобрать общую функцию $u(t)$), чтобы остановить оба маятника, т.е. можно ли для заданных чисел $\omega_i > 0$, x_i^0, $\dot{x}_i^0$, $i = 1, 2$, указать функцию $u(t)$ такую, чтобы для некоторого $T > 0$ было выполнено $x_1(T) = x_2(T) = 0$, $\dot{x}_1(T) = \dot{x}_2(T) = 0$? Рассмотрите два случая: $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_1 \neq \omega_2$.



7. Решите уравнение $\frac{\partial u}{\partial x} + (2y-u)\frac{\partial u}{\partial y} = y + 2u$.

8. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую гладкую функцию $|a(t)| < \varepsilon$, что уравнение
$$\ddot{x} + (1 + a(t))x = 0, \quad t > 0,$$
имеет неограниченное решение.

9. Решите уравнение $\frac{du}{dx} - u^2 = \frac{1}{x^4}$.

10. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y''' + p(x)y = 0$, где $p(x)$— непрерывная функция, $p(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть y — такое его решение, что $y(x_1) = y'(x_1) = 0$, $y''(x_1) = y_0$ в некоторой точке $x_1 \in \mathbb{R}$. При каких значениях y_0 это решение обращается в ноль хотя бы в одной точке $x_2 > x_1$?

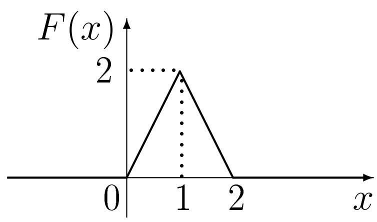
Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2014 г.

1. Имеется ли среди решений уравнения
$$y' + |y| + 1 = 0$$
такое, которое определено на всей числовой прямой?

2. Решить задачу Коши для уравнения
$$y' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 + 4\,x + 4\,y} - x - 2\right)$$
с начальным условием

a) $y(-1) = 3$; b) $y(-2) = 1$.

3. Решить задачу Коши
$$y'' + 4\,y = F(x),$$
$$y(0) = 0, \; y'(0) = 0,$$
где
$$F(x) = 0, \quad x \in (-\infty,\, 0] \cup (2,\, \infty);$$
$$F(x) = 2\,x, \quad 0 < x \leq 1;$$
$$F(x) = 4 - 2\,x, \quad 1 < x \leq 2.$$



4. Исследовать на устойчивость особые точки уравнения колебаний маятника, к которому приложен вращающий момент L:
$$\ddot{x} + a\,\dot{x} + b\sin x = L, \qquad \text{где } |L| < b.$$

5. Зная функцию $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$, нигде не равную нулю, найдите какую-нибудь функцию $g \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ с определителем Вронского $W_{f,g}(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$, а также выпишите уравнение $\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0$, $p, q \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$, которому удовлетворяют обе эти функции.

6. Для каких значений $n > 1$ некоторое ненулевое решение некоторого уравнения вида $y^{(n)} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0$ имеет бесконечное число нулей на интервале $(0; 1)$ при: а) $p, q \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$; б) $p, q \in \mathrm{C}(0; 1)$?

7. а) Можно ли продолжить на $[0, \infty)$ решение задачи Коши
$$y'' = y^3,$$
$$y(0) = y_0 > 0,$$
$$y'(0) = y_1 > 0?$$
б) Существует ли заданное на $(-\infty, \infty)$ решение этого уравнения, не равное тождественно нулю?

8. Пусть функция $u(x)$ является решением уравнения
$$u(x) = \frac{d}{dx}\left(u(x) - x\int_0^3 u(s)ds\right),$$
удовлетворяющим условию $u(0) = 3$.

   Найти значение выражения
$$u(3) + \frac{47 - 19e^3}{5 - e^3}.$$

9. Найти множество поверхностей, ортогональных ко всем поверхностям следующего семейства:
$$z^2 - pxy = 0,$$
где p – вещественный параметр.

10. Для задачи Коши
$$y' = y^2 + \mu t y^4, \quad y(0) = 1 + \mu$$
найти $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям 2015 г.

1. Для каждого значения $m = 0, 1, \ldots$ укажите наименьшее значение k, при котором любое линейное уравнение
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = t^m \cos t$$
(с постоянными действительными коэффициентами) имеет частное решение вида
$$y = p_1(t)\cos(t + \varphi_1) + \ldots + p_k(t)\cos(t + \varphi_k),$$
где p_i — многочлены, а φ_i — числа.

2. Верно ли, что у любой системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

оператор A которой имеет собственные значения $\lambda_i[A]$ $(i = 1, \ldots, n)$, для всякого $T > 0$ найдется ненулевое решение $x(\cdot)$, удовлетворяющее оценке:

$$1)\ |x(T)| \geq |x(0)|\, e^{T \cdot \min\limits_i |\lambda_i[A]|}, \qquad 2)\ |x(T)| \geq |x(0)|\, e^{T \cdot \max\limits_i \mathrm{Re}\lambda_i[A]},$$

где $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$?

3. Верно ли, что решения семейства задач Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad t \in I \subset \mathbb{R}, \quad x \in J \subset \mathbb{R}, \quad f \in \mathrm{C}^1(I \times J),$$

непрерывно зависят от начального значения $x_0 \in J$ равномерно по t на заданном ограниченном интервале I, если известно, что все они определены на нем и имеют конечные пределы на его концах?

4. Существует ли такая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, что все решения уравнения $y'' = f(y, y')$ являются ограниченными и имеют ограниченную область определения?

5. Решить уравнение

$$y'^3 + x\, y'^2 - (2x + 3)y' + y = 0.$$

Будет ли единственным решение с начальным условием

а) $y(-1) = 1$; б) $y(-2) = 0$.

6. Исследовать характер особых точек и построить фазовый портрет системы

$$\dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2,$$

$$\dot{y} = \arctan(x^2 + xy)$$

на квадрате $[-5,\ 5] \times [-5,\ 5]$.

7. Может ли уравнение

$$y'' + f(y') + y = 0,$$

с непрерывной функцией $f(y)$, удовлетворяющей условиям $f(0) = 0$ и $yf(y) > 0$ при $y \neq 0$, иметь периодические решения, отличные от $y = 0$?

8. Пусть $y(x)$—решение уравнения

$$y''' + p(x)y = 0$$

с непрерывной положительной на $[x_0, \infty)$ функцией $p(x)$, удовлетворяющее условиям $y(x_1) = y'(x_1) = 0, y''(x_1) > 0$ в некоторой точке $x_1 > x_0$. Доказать, что $y(x)$ убывает на $(x_0,\, x_1)$.

9. Можно ли продолжить на $[0, \infty)$ решение задачи Коши

$$y^{(n)} = y^{2015} + x^{2014},$$

$$y(0) = y_0 > 0,\ y'(0) = y_1 > 0,\ \ldots, y^{(n-1)} = y_{n-1} > 0$$

при а) $n = 1$, б) $n = 2$, в) любом n?

10. Найти число решений следующей задачи:

$$a(a^2-3a-4)\,y'''+a(a-1)\,y''-(a-4)\,y'+4y=x^2+a,$$

$$y(0)=-1,\ y'(0)=1,$$

в зависимости от параметра a. Ответ пояснить.

ОЛИМПИАДЫ ПО УРАВНЕНИЯМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2009 г.

1. Найти общее решение уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0$ в полуплоскости $y>0$.

2. Имеет ли решение (при произвольной непрерывной функции φ на ∂K, K— единичный квадрат на плоскости $\mathbb{R}^2$) задача Дирихле

$$u_{xx}-u_{yy}=0 \quad \text{в} \quad K, \qquad u\big|_{\partial K}=\varphi(x,y), \qquad u\in C^2(\overline{K})?$$

3. Пусть $v_n(x,y)$— последовательность решений задачи Дирихле

$$\Delta v_n=0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad v_n\big|_{\partial\Omega}=\varphi_n(x,y),$$

Ω— ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $\varphi_n\in C(\partial\Omega)$, $\|v_n\|_{L_2(\partial\Omega)}\to 0$. Можно ли утверждать, что $\|v_n\|_{L_2(\Omega)}\to 0$?

4. Рассмотрим уравнения

$$u_{tt}=-u_{xx}, \qquad u_{tt}=u_{xx}, \qquad u_t=u_{xx}.$$

Какие из этих уравнений имеют двоякопериодические и отличные от *const* решения, определенные на всей плоскости?

5. Решите в явном виде задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2u, \qquad u\big|_{t=0}=1.$$

6. Докажите, что для решения задачи

$$\begin{array}{l} u_{tt}=u_{xx}, \quad t>0,\ x\in(0,\pi), \\ u\big|_{x=0}=0, \qquad u\big|_{x=\pi}=0, \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x), \qquad u_t\big|_{t=0}=\psi(x) \end{array}$$

выполняется оценка

$$\int\limits_0^\pi (\alpha u^2+\beta u_x^2+\gamma u_t^2)\,dx\le C\int\limits_0^\pi (\varphi_x^2+\psi^2)\,dx,$$

где $C=\max(\alpha+\beta,\gamma)$, α,β,γ— положительные постоянные.

7. Пусть $u(x,y)$— решение задачи
$$u_{xx}+u_{yy}=1 \quad \text{в} \quad K=[0,2]\times[0,2], \qquad u\big|_{\partial K}=0.$$

   а) Укажите такое целое N, что $N<u(1,1)<N+1$.

   б) Укажите вещественное R, что $|u_x^{(2009)}(1,1)|<R$.

8. Рассматривается решение уравнения
$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy} \qquad \text{в} \quad t>0, \quad 0<x<1, \quad 0<y<\pi,$$
такое, что
$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=1}=u\big|_{y=0}=u\big|_{y=\pi}=0, \qquad u\not\equiv 0.$$
Доказать, что $u(t,x,y)$ меняет знак при сколь угодно больших t.

9. Рассматривается уравнение
$$u_{tt}=u_{xx}, \quad t>0, \quad 0<x<1, \qquad u\big|_{x=0}=u\big|_{x=1}=0.$$
Может ли $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t,x)=0$ равномерно на $0\le x\le 1$?

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2010 г.

1. Найти общее решение уравнения $u_{xx}-6u_{xy}+9u_{yy}=0$.

2. Найти в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}=\frac{d^4}{dx^4}+16$.

3. Найти $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)$, где $u(x,t)$ — решение задачи Коши $\begin{cases} u_t=u_{xx}+e^{-t} \\ u(x,0)=\operatorname{arctg} x. \end{cases}$

4. Найти решение задачи Коши:
$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+u_{yy}-u_x \\ u(x,y,0)=\sin^2(x-2y). \end{cases}$$

5. Может ли нетривиальное решение краевой задачи
$$\begin{cases} u_t=u_{xx} \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x) \end{cases}$$
иметь при некотором $x^*\in(0,\pi)$ счетное множество нулей при $t\in(0,+\infty)$.

6. При каких A существует нетривиальное решение в виде многочлена задачи Дирихле
$$\begin{cases} \Delta u=A, \ \text{ где } A=\text{const} \\ u|_{\partial\Omega}=0, \end{cases}$$
где Ω — равносторонний треугольник на плоскости XOY (см. рис. 1).

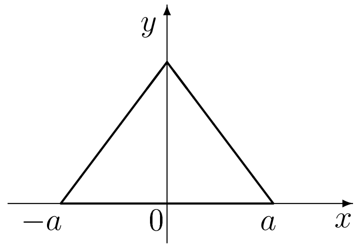


Рис. 1: Ω

7. Имеет ли решение краевая задача и единственно ли оно?

$$a)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad x < 0 \\ u|_{t=ax} = 0, \quad a > 0, \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad x < 0 \\ u|_{t=ax} = 0, \quad a > 0. \end{cases}$$

8. Рассмотрим задачу Дирихле

a) $\begin{cases} \Delta u = f(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$ где $f(x) \in F$, F — множество функций, плотное в $\mathcal{L}_2(\Omega)$;

b) $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \end{cases}$ где $\varphi(x) \in \Phi$, Φ — множество функций, плотное в $\mathcal{L}_2(\partial\Omega)$.

Плотно ли в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ множество решений?

9. Пусть

$w(y)$ — решение задачи $\begin{cases} \Delta w = 0 \text{ в } \mathbb{R}^n \setminus \bar{G}_0, \\ w|_{\partial G_0} = 1, \\ w \to 0 \text{ при } |y| \to \infty, \end{cases}$

$\theta(y)$ — решение задачи $\begin{cases} \Delta \theta = 0 \text{ в } \mathbb{R}^n \setminus \bar{G}_0, \\ \frac{\partial\theta}{\partial\nu}\big|_{\partial G_0} = 1, \\ \theta \to 0 \text{ при } |y| \to \infty, \end{cases}$

Докажите, что $\displaystyle\int\limits_{\partial G_0} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma \cdot \int\limits_{\partial G_0} \theta d\sigma \geq S^2(\partial G_0)$. Когда достигается равенство?

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2011 г.

1. Решить задачу Коши–Гурса, построив область на плоскости, где это решение определяется однозначно: $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = 2x$, $u(x,6x) = 49x^2 + x$, $0 < x < 7$, $0 < t < 6$.

2. Можно ли "раскачать" ограниченную струну до сколь угодно большой амплитуды, прилагая к одному из ее концов стремящуюся к нулю силу? (Другой конец закреплен.)

3. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция, заданная вне шара $|x| < 1$. Может ли она убывать быстрее любого $|x|^{-m}$ при $|x| \to \infty$, где m — произвольное положительное число, и не быть тождественно равной нулю?

4. Корректна ли задача Дирихле для уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$ в круге?

5. Даны уравнения

   а) $u_{tt} - u_{xx} = 0$,

   б) $u_{tt} + u_{xx} = 0$,

   в) $u_{tt} + u_{xx} + u = 0$,

   г) $u_{tt} + u_{xx} - u = 0$

   на плоскости (x, t) и равносторонний треугольник T на плоскости (x, t) со стороной a. Рассматриваются решения указанных уравнений, равные нулю на границе T. Какое из этих решений может быть отлично от 0 в T?

6. Постройте последовательность гладких функций, сходящихся к $\delta''(x)$ в $D'(\mathbb{R}^1)$.

7. Рассматривается решение уравнения $u_{tt} = u_{xx}$, $t \geq 0$, $x \geq 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_t(x, 0) = u_1(x)$ и граничному условию $u(0, t) = \mu(t)$. Необходимо вычислить значение решения в точке (x, t). На каких интервалах необходимо знать значения данных $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu(t)$, чтобы можно было вычислить значение решения

   а) в точке $(x, t) = (10, 15)$,

   б) в точке $(x, t) = (15, 10)$?

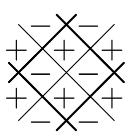
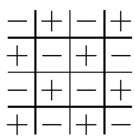
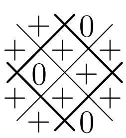
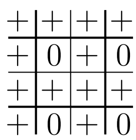
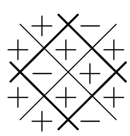
8. Единственно ли решение задачи $u_{xx} + u_{yy} - u_x - 3u_y = f(x, y)$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, $\Omega = [0, 1] \times [0, 3]$?

9. Рассматривается ограниченное решение уравнения $u_t = u_{xx}$, $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$, удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = \left(1 + \frac{1}{|x|+1}\right)^x$. Найти $\lim_{t\to\infty} u(x, t)$.

10. Существует ли в $\mathbb{R}^2$ решение задачи $u_{xy} + u = 1$, $u|_\Gamma = 2$, $u_y|_\Gamma = 0$, $\Gamma = \{(x, y) : y = x^2\}$?

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2012 г.

1. Может ли классическое решение уравнения струны $u_{tt} = u_{xx}$ на $\mathbb{R}^2$ иметь знаки, как изображено на рисунках а)—д)? (Везде плоскость замощена квадратами 2 клетки × 2 клетки. Оси координат параллельны знакам +.)

   а)  б)  в)  г)  д) 

2. Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + f(t, x), \quad t \in [0, \infty), \quad x \in [0, \pi], && (1)\\
&u\Big|_{t=0} = \varphi(x), && (2)\\
&u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\pi} = 0.
\end{aligned}
$$

   Пусть $f \to 0$ при $t \to \infty$.

   а) Верно ли, что $u(x, t) \to 0$ при $t \to \infty$?

б) Тот же вопрос для задачи (1),(2) с краевыми условиями $u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi} = 0$.

в) Тот же вопрос для задачи (1),(2) с краевыми условиями

$$(u_x - \alpha u)\big|_{x=0} = (u_x + \alpha u)\big|_{x=\pi} = 0,\ \alpha > 0.$$

3. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{gathered} u_{tt} + \alpha\ u_t = u_{xx},\ \alpha > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x). \end{gathered}$$

а) Убывает ли амплитуда решения при $t \to \infty$, если начальные условия $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ финитны?

б) Справедлива ли экспоненциальная оценка скорости убывания решения при $t \to \infty$?

4. Может ли решение уравнения теплопроводности с "памятью"

$$u_t = u_{xx} - C\int\limits_0^t u_{xx}e^{-(t-\tau)}d\tau.$$

неограниченно возрастать при $t \to +\infty$?

5. Пусть $u(x,y)$ — решение уравнения

$$\Delta u = 0 \quad \text{в полуполосе} \quad [0,\infty)\times[0,\pi],$$

удовлетворяющее условиям $u\big|_{y=0} = u\big|_{y=\pi} = 0$.

а) Докажите, что если $|u| < M$, то $u(x,y)$ экспоненциально убывает при $x \to +\infty$.

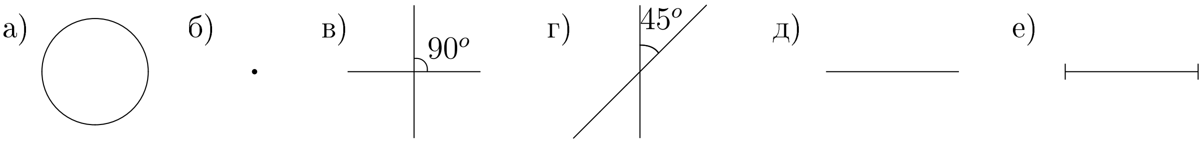
б) Пусть $u(x,y)$ убывает по x быстрее любой экспоненты. Верно ли, что $u(x,y) \equiv 0$?

6. Пусть $\Omega = (0,1)^n$ – куб в n-мерном пространстве. Докажите, что задача

$$\begin{cases} \Delta u + x_n^{-\frac{1}{2}}u = f, \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

имеет не более одного решения.

7. Пусть $u(x,y)$ — гармоническая функция на плоскости. Может ли ее линия уровня иметь одну из следующих форм:



8. Может ли у неограниченной струны ($-\infty < x < \infty$) целый отрезок находиться в покое в процессе движения струны, начиная с некоторого момента? Одна точка?

Тот же вопрос для ограниченной струны с закрепленными концами.

9. Решить в D' уравнение
$$y''' + 2y'' + y' = \delta(x).$$

10. Пусть $u(x,t)$ — решение в $[0,1] \times \overline{\mathbb{R}}_+$ смешанной задачи
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = x(1-x)^2.$$
Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} \int\limits_0^1 \left[u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)\right]\, dx.$

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2013 г.

1. Найти решение $y'' + y = \delta^{(2013)}(x)$ из $D'(\mathbb{R})$.

2. Рассматривается задача Коши
$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta_x u, \quad t \in (0,\infty), \;\; x \in \mathbb{R}^n, \quad n = 2,3. \\ u\big|_{t=0} = 0, \;\; u_t\big|_{t=0} = f(x). \end{cases}$$
Функция f неотрицательна, и отлична от нуля в серповидной области: расположенной внутри шара радиуса 1, и вне шара радиуса 2, таких, что граничные сферы этих шаров пересекаются в диаметрально противоположных точках сферы радиуса 1. Указать все те значения t, при которых сумма значений u, вычисленных в центрах этих шаров, отлична от нуля. Рассмотреть задачу в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

3. Пусть $D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ — шар в $\mathbb{R}^3$, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к D. Функция $u(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению
$$\Delta u(x,y,z) = x^{2013} + y^{2013} + z^{2013} + 2013 \qquad \text{в} \;\; D$$
и условию $u(0,0,0) = 0$.
а) При каких значениях параметра a эта функция может удовлетворять краевому условию $u\Big|_{\partial D} = a$?
б) Тот же вопрос про краевое условие $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial D} = a$.

4. Рассмотрим колебания ограниченной струны с закрепленной границей:
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad t \in (0,\infty), \;\; x \in (0,l), \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \;\; u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0. \end{cases}$$
Некоторый отрезок $[a,b] \subset (0,l)$ находится в покое в процессе колебаний струны, то есть $u(x,t) \equiv 0$ при $(x,t) \in [a,b] \times [0,\infty)$. Можно ли утверждать, что $u(x,t) \equiv 0$ в $(x,t) \in [0,l] \times [0,\infty)$, то есть что вся струна покоится?

5. Хорошо известно, что решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной области единственно. Будет ли оно единственно в полосе $(x_1,x_2) \in (-\infty,\infty) \times (0,l)$ на плоскости? А если рассматривать только ограниченные решения?

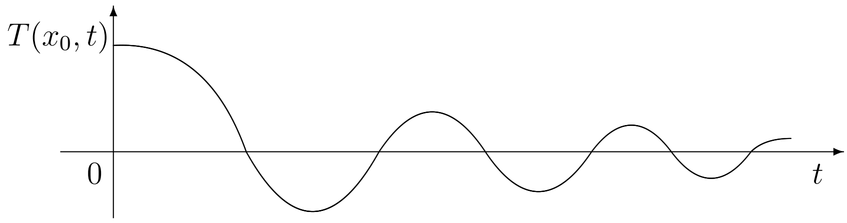
6. Пусть $T(x,t)$ — температура ограниченного тела с нулевыми условиями на границе.

   $T_t = T_{xx}, \quad t \in (0,\infty), \;\; x \in (0,1),$

   $T\big|_{t=0} = \varphi(x),$

   $T\big|_{x=0} = T\big|_{x=1} = 0.$

   Может ли температура колебаться в некоторой внутренней точке x_0 тела, именно, может ли $T(x_0,t)$ иметь такой график:



7. Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u + f(t,x), \quad t \in (0,\infty), \;\; x \in \Omega, \qquad |f(t,x)| < \varepsilon, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u\big|_{\partial\Omega\times[0,\infty)} = 0. \end{cases}$$

   а) Можно ли за конечное время остудить тело до нулевой температуры $u(\tau,x) \equiv 0$, $x \in \Omega$?

   б) Можно ли за конечное время нагреть тело в заданной точке $x_0 \in \Omega$ с нулевой температуры $\varphi(x) \equiv 0$ до заданной температуры $u(\tau,x_0)$, $|u(\tau,x_0)| > M$?

8. Найти общее решение уравнения $u_{xy} + xu_x + yu_y + (1+xy)u = 0$.

9. Найти множество на плоскости (x,t), в котором однозначно определено решение задачи Гурса, и получить явный вид решения:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

$$u(x,0) = \sin x, \;\; x \geq 0, \qquad u(x,x) = x, \;\; 0 \leq x \leq 1.$$

10. Построить функцию Грина для дифференциального оператора $Lu = u'' - \frac{2}{x^2}\, u$, $u(1) = 0$, $u(x)$ ограничена на интервале $(0,1)$.

11. Можно ли произвольную функцию из $L_2(\Omega)$ (Ω−ограниченная область) приблизить в $L_2(\Omega)$ решениями

    а) уравнения Лапласа;

    б) уравнения колебаний струны;

    в) уравнения теплопроводности?

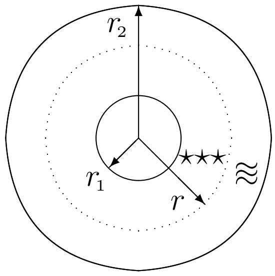
Олимпиада по уравнениям с частными производными 2014 г.

1. Найти решение $y'' - 2y' + 5y = \delta^{(2014)}(x)$ из $D'(\mathbb{R})$.

2. Пусть $u(x_1, x_2, x_3)$ — решение задачи Дирихле в шаре $\{|x| < 2\}$ в $\mathbb{R}^3$:
$$\Delta u = 0 \text{ при } |x| < 2, \quad u\Big|_{|x|=2} = x_1^2.$$
Найти $u(0, 0, 0)$.

3. Найти $\lim\limits_{t\to\infty} u(t, x, y)$, где $u(t, x, y)$ — решение задачи Коши
$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \ \ t > 0, \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u\Big|_{t=0} = \frac{\left(x^2 + x|x|\right) \cos^2 y}{1 + x^2}$$

4. Сечение трубки представляет собой кольцо с внутренним и внешним радиусами r_1 и r_2, между ними находится вода. Изнутри трубка охлаждается до температуры $-T_1 < 0$, снаружи поддерживается температура $T_2 > 0$. Какой толщины лед появится на внутренней стенке? Теплопроводности льда и воды будем считать равными.
$$\begin{cases} u_t(t, \vec{x}) = \Delta_x u(t, \vec{x}), \quad t > 0, \ \ r_1 < |x| < r_2, \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(\vec{x}), \\ u\Big|_{|x|=r_1} = -T_1, \ \ u\Big|_{|x|=r_2} = T_2, \end{cases}$$
$$r : \lim_{t\to\infty} u(t, \vec{x})\Big|_{|x|=r} = 0.$$



5. На плоскости (x, t) найти область определенности решения задачи Коши-Гурса и само решение:
$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$
$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = e^x, \quad 0 < x < 1,$$
$$u_x(0, t) = 1, \quad 0 < t < 1.$$

6. Корректна ли задача
$$\mathcal{L}u = 0 \ \text{ в } \ K, \qquad u\big|_{\partial K} = \varphi(t, x),$$
$\varphi(t, x)$ — непрерывная функция, $K = (0, \pi) \times (0, \pi)$, если

а) $\mathcal{L} \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$,

б) $\mathcal{L} \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$?

7. Рассматривается краевая задача для уравнения колебаний струны
$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < t < T, \ \ 0 < x < \pi,$$
$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \ \ u_t\Big|_{t=0} = u_1(x), \quad 0 < x < \pi,$$
$$u\Big|_{x=\pi} = \varphi(t), \ \ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=\pi} = \psi(t), \quad 0 < t < T.$$
Корректна ли эта задача?

8. Пусть $\varphi(x)$ — заданная финитная функция. Можно ли найти такую непрерывную функцию $f(x)$, чтобы решение задачи

$$u_t = u_{xx} \ \text{ при } \ x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = f(x)$$

удовлетворяло условию $u(T,x) = \varphi(x)$? (Иначе говоря, можно ли так нагреть стержень, что в момент времени $t = T$ распределение температуры станет $\varphi(x)$?)

9. Могут ли семейства кривых

$$y = x^3 + C_1, \quad y = -x^5 + C_2, \quad -\infty < C_1, C_2 < \infty$$

быть характеристиками гиперболического на плоскости уравнения?

Олимпиада по уравнениям с частными производными 2015 г.

1. Найти решение уравнения $y'' + 4y = \delta'(x-1)$ из $D'(\mathbb{R})$.

2. Найти общее решение уравнения $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x - 2u_y = 0$.

3. Сколько решений имеет задача

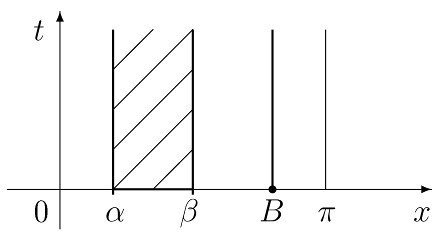
$$\Delta u(x_1,x_2,x_3) = 1, \qquad |x| < 1,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{|x|=1} = a + x_1^3 + x_2^5 + x_3^7$$

в зависимости от параметра a?

4. Рассматривается задача в полуполосе $\Pi = (0,\pi) \times (0,\infty)$:

$u_{tt} = u_{xx}, \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0.$

Может ли нетривиальное решение этой задачи быть равно нулю
а) в полуполосе $(x,t) \in (\alpha,\beta) \times (0,\infty)$;
б) на полупрямой $x = B,\ t > 0$?



5. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи Коши:

$$u_{tt} = u_{xx} \quad t > 0, \ \ x \in \mathbb{R}, \qquad u|_{t=0} = \varphi(x) \geqslant 0, \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \geqslant 0,$$

и известно, что $u(x,T) = 0$ при $|x| > 2015$ при некотором $T > 0$. Указать T_0 такое, что если $T > T_0$, то $u \equiv 0$, иначе, если $T < T_0$, то возможно нетривиальное решение $u \neq 0$.

6. Пусть

$$u_t = u_{xx} + \sin t, \quad x \in (0,\pi), \ \ t > 0, \qquad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0.$$

Докажите, что существует $u_0(x,t)$ — периодическая по t функция, такая что $\|u(x,t) - u_0(x,t)\|_C \longrightarrow 0$ при $t \to \infty$.

7. Пусть $u(t,x)$— решение задачи Коши

$$u_t = \Delta u + u, \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ — финитная функция. Может ли соответствующее решение $u(t,x)$ быть при некотором $t>0$ финитной функцией?

8. Рассмотрим задачу Коши

$$u_{tt} = -u_t + u_{xx}, \qquad u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = 0,$$

$\varphi(x)$ — финитная функция.

а) Докажите, что $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[(u_x)^2 + (u_t)^2\Big]\, dx \to 0$ при $t \to \infty$.

б) Имеет ли решение *передний фронт* или *задний фронт*?

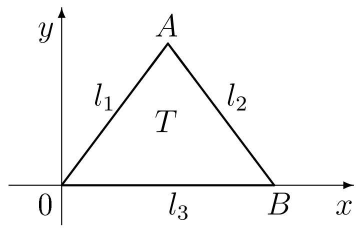
9. Будет ли решение задачи

$$u_t + u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная и ограниченная функция, непрерыно зависеть от начальных условий?

10. Пусть $u(x,y)$– гармоническая функция в $\mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x,y)|\, dx < C$, где C не зависит от y. Верно ли, что $u \equiv 0$?

11. Рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа в равностороннем треугольнике T,
$u\big|_{l_1} = u\big|_{l_2} = 0, \quad u\big|_{l_3} = \varphi(x)$,
$\varphi(x)$— гладкая функция, $\varphi(0) = \varphi(B) = 0$.
Докажите, что $|u(x,y)| \leqslant Cr^{\alpha}$, $\alpha > 1$,
r — расстояние от точки A до точки (x,y).



Список литературы

[1] Сборник задач по уравнениям с частными производными под редакцией А.С.Шамаева М.: Бином, 2005.

[2] *Шамаев А.С.*, Олимпиады по дифференциальным уравнениям для студентов 2, 3 курсов механико–математического факультета МГУ // Математика в высшем образовании, 2003, с. 77–83.

[3] *Шамаев А.С., Капустина Т.О.*, Педагогическая деятельность кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова. Олимпиады и письменные экзамены по дифференциальным уравнениям // Математика в высшем образовании, 2008, №6, с. 11–32.

Abstracts

The Department of Differential Equations

Kozlov V.V., professor, real member of the Russian Academy of Sciences, the head of the department,
Department of Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, M.V.Lomonosov Moscow State University,
e-mail: kozlov@pran.ru
Chechkin G.A., professor, Department of Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, M.V.Lomonosov Moscow State University,
e-mail: chechkin@mech.math.msu.su

The history of the Department of Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, M.V.Lomonosov Moscow State University, has begun at the end of 1935. Here we briefly outline the history of the department, we write about the people who worked in the department, telling about the affairs of the department.

State of Rest Perturbed by Steklov–Type Boundary Condition

Abdulazade N.N., student,
Baku Branch of M.V.Lomonosov Moscow State University,
e-mail: n-abdu@mail.ru
Chechkin G.A., professor, Department of Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, M.V.Lomonosov Moscow State University,
e-mail: chechkin@mech.math.msu.su

In the paper we consider problem in a fixed 2D domain with Steklov type boundary condition on small part of the boundary. We study the question of disapearance of spectrum (convergence of eigenvalues to infinity) to such a problem as the length of the small part of the boundary tends to zero.

Students' olympiads on differential equations at Mechanics and Mathematics Department of Moscow University

Astashova I.V., professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: iastashova@mesi.ru
Shamaev A.S., professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: sham@rambler.ru
Kapustina T.O., assistant professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: kapustina-tatiana@yandex.ru

Chair of Differential Equations presents its experience in organizing olympiads on differential equations for the students of Mechanics and Mathematics Department of Moscow University.

The oscillation theorem for a multipoint boundary value problem for the equation of the fourth order

Kulaev R.Ch., PhD., Ass. Prof, South Mathematical Institute VSC RAS, NOSU
e-mail: kulaev@smath.ru

In work necessary and sufficient conditions of positivity of function of Green of a multipoint boundary value problem for the equation of the fourth order. In these conditions the set of values of coefficients at which function of Green is positive in the range of definition and out of which it loses property of a positivity is defined. Is shown that positivity of function of Green is equivalent to its oscillation and doesn't depend on boundary conditions.

Optimal strategies of risk sensitive investment on a stochastic market taking into account the jumps of the securities prices

Lobsanova T.B., graduate student, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: *lobsanova_tb@mail.ru*

We solve a simplest problem of the risk sensitive optimal investment on the market of securities with the prices involving Brownian and Poissonian processes. The key point is to find an exact solution to the Fokker-Planck-Kolmogorov equation for the density distribution of the capital of portfolio, which is integro-differential in this case.

Asymptotic Behavior of Solutions to Equations of Boundary Layer for Generalized Newtonian Medium

Samokhin V.N., professor, Ivan Fedorov Moscow State University of Printing Arts
e-mail: vnsamokhin@mtu-net.ru
Fadeeva G.M., graduate student, Department of Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, M.V.Lomonosov Moscow State University,
e-mail: ownletters@mail.ru
Chechkin G.A., professor, Department of Differential Equations, Faculty of Mechanics and Mathematics, M.V.Lomonosov Moscow State University,
e-mail: chechkin@mech.math.msu.su

In the paper we study a qualitative behavior of a solution to the system of equations of boundary layer for generalized newtonian model of continuous medium suggested by O.A.Ladyzhenskaya. We prove the theorem on continuous dependence of tangential component of the velocity of the medium in the boundary layer of the initial profile of velocities. We derive an ordinary differential equation, which solutions we use for constructing similar solutions to considered system of boundary layer. We prove, that under special conditions the solutions to equations of boundary layer converge asymptotically to the similar solution.

Calculation in the mind the exponent of a two-dimensional matrix by Filippov method

Sergeev I.N., professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: igniserg@gmail.com

There is told about how prof. A.F. Filippov found in his mind the exponent of an arbitrary two-dimensional matrix. His method was based on a deep inner connection between two-dimensional matrices and their complex eigenvalues.

Exact Baire class of Lyapunov exponents for some space of linear systems with the compact-open and uniform topologies

Vetokhin A.N., professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: vetokhin@front.ru

It is proved that the constructive index, the index of conditional exponential stability, the dimension of the solution space is less than the figure given real numbers, regarded as functionals on the space of linear differential systems with a uniform and compact-open topology belong to the second Baire class accuracy. The dimension of the solution space index does not exceed a given real number, considered as a functional on the space of linear differential systems with a uniform and compact-open topology, belongs to the third Baire class accuracy.

Spectral analysis and representations of the solutions of integrodifferential equations in Hilbert space

Vlasov V.V., professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: vikmont@yandex.ru
Rautian N.A., associated professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: nrautian@mail.ru
Shamaev A.S., professor, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: sham@rambler.ru

We study the spectra of the operator-valued functions which are the symbols of the abstract integrodifferential equations in a Hilbert space. We analyze the integrodifferential equations arising in applications (Gurtin-Pipkin type equations describing the process of heat propagation in media with memory, integrodifferential equations arising in the theory of viscoelasticity). We study the representations of the solutions of these equations as a series, obtained on the base of structure and asymptotic of spectra of operator-valued functions mentioned above.

On oscillation of solutions to the second-order differential equations of Emden–Fowler type

Dulina K.M., post-graduate, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: sun-ksi@mail.ru
Korchemkina T.A., student, Mechanics and Mathematics Department of MSU,
e-mail: krtaalex@gmail.com

Consider Emden–Fowler type second-order differential equation

$$y'' + p(x,\, y,\, y')\, |y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad k > 1,$$

with positive, continuous in x and Lipschitz continuous in y_0, y_1 function $p(x, y_0, y_1)$ satisfying inequalities

$$0 < m \le p(x,\, y,\, y') \le M < +\infty.$$

It is proved that all non-extensible solutions to the equation above are oscillating. The behavior of non-extensible solutions near domain boundaries is obtained.

СОДЕРЖАНИЕ

Предыдущие выпуски серии «Современные проблемы математики и механики»

Том I. Прикладные исследования

Выпуск 1. Под редакцией В.В. Александрова, В.Б. Кудрявцева.
Выпуск 2. Под редакцией В.В. Александрова, В.Б. Кудрявцева.

Том II. Механика

Выпуск 1. Под редакцией Г.Г. Черного, В.П. Карликова.
Выпуск 2. Под редакцией Б.Е. Победри, Е.В. Ломакина.

Том III. Математика

Выпуск 1. Под редакцией Т.П. Лукашенко, В.Н. Чубарикова.
Выпуск 2. Геометрия и топология. Под редакцией А.Т. Фоменко.
Выпуск 3. Дискретная математика. Под редакцией О.М. Касим-Заде.

Том IV. Математика

Выпуск 1. Теория вероятностей и математическая статистика. Под редакцией А.Н. Ширяева.

Выпуск 2. Динамические системы. Под редакцией А.Т. Фоменко, В.Н. Чубарикова.

Выпуск 3. Алгебра и теория чисел. Под редакцией В.А. Артамонова, В.Н. Латышева, Ю.В. Нестеренко.

Том V. Математика

Выпуск 1. Дифференциальные уравнения. Под редакцией И.Н. Сергеева, А.С. Шамаева.

Выпуск 2. Прикладная математика. Под редакцией В.Б. Кудрявцева, Г.М. Кобелькова.

Выпуск 3. Математическая кибернетика. Под редакцией В.Б. Кудрявцева.

Том VI. Математика

Выпуск 1. К 105-летию С.М. Никольского. Под редакцией М.К. Потапова, И.Н. Сергеева, В.Н. Чубарикова.

Выпуск 2. К 100-летию Н.В. Ефимова. Под редакцией И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова.

Выпуск 3. К 100-летию Н.В. Ефимова. Под редакцией И.Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова.

Том VII. Математика. Механика

Выпуск 1. К 190-летию со дня рождения П.Л. Чебышева. Под редакцией А.Н. Ширяева, А.В. Лебедева, В.М. Федорова и А.С. Кулешова.

Выпуск 2. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Под редакцией Е.И. Кугушева и Т.В. Поповой.

Том VIII. Математика

Выпуск 1. К 80-летию А.Г. Костюченко. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ. В.В. Власов, Д.А. Медведев, Н.А. Раутиан

Выпуск 2. К 80-летию механико-математического факультета МГУ, к 130-летию Н.Н. Лузина, к 85-летию П.Л. Ульянова. Под редакцией А.Н. Бахвалова.

Выпуск 3. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова и 110-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова. Теория вероятностей и математическая статистика. Под редакцией А.Н. Ширяева и А.В. Лебедева

Том IX. Математика

Выпуск 1. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Маломерная топология и комбинаторика в оригинальных задачах. Д.П. Ильютко, В.О. Мантуров, И.М. Никонов

Выпуск 2. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Исследования по математическому анализу. Под редакцией Т.П. Лукашенко и Т.В. Родионова

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том IX. Математика

Выпуск 3. К 80-летию механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Дифференциальные уравнения. Под редакцией И.В. Асташовой и И.Н. Сергеева

Подготовка оригинал-макета: ???В.М. Федоров

Подписано в печать ???21.11.2011
Формат 60 x 90 /8 Бумага офс. №1. Усл. печ. л. 10,5.
Заказ 2 Тираж 100 экз.

Издательство Попечительского совета при Механико-математическом факультете Московского университета
119991, Москва, Воробьевы Горы, д. 1.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета
119991, Москва, Воробьевы Горы.