О преподавании курса обыкновенных дифференциальных уравнений в Московском университете

Сергеев Игорь Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор

МГУ имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Заседание
Ассоциации математических факультетов

в рамках форума «Математика и глобальные вызовы XXI века»
к 100-летию Пермского университета

Пермь, 20–21 мая 2016 г.

Введение

В докладе ставятся и обсуждаются некоторые проблемы преподавания курса обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

За основу взят обязательный годовой курс ОДУ, читавшийся автором в течение 15 лет студентам механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Отдельные темы и вопросы курса ОДУ любопытны сами по себе и имеют методическое значение.

Основа курса ОДУ

Лекции по ОДУ опираются на материал, изученный студентами на 1-м курсе или в предшествующей части 2-го курса, и прежде всего, в следующих дисциплинах:

- математический анализ,
- линейная алгебра,
- аналитическая геометрия.

Что же касается школьной программы, то в курсе ОДУ:

- не используются никакие школьные знания из области дифференциальных уравнений,
- вынужденно осваиваются некоторые недополученные в школе приемы и навыки.

Дальнейшее использование

Понятия и факты из курса ОДУ в дальнейшем используются в следующих обязательных курсах:

- уравнения в частных производных,
- оптимальное управление,
- дифференциальная геометрия,
- численные методы,
- различные разделы механики

и др.

Развитие теории

Без курса ОДУ немыслимо чтение специальных курсов:

- динамические системы,
- теория устойчивости,
- теория колебаний,
- качественные свойства решений

и др.

Постепенное разрастание материала курса ОДУ и ослабление уровня студентов приводят к постоянному перераспределению его обязательной и специальной составляющих.

Основные главы ОДУ

Курс ОДУ можно условно разбить на следующие восемь основных глав.

1. Поля направлений на плоскости.
2. Существование и единственность решений.
3. Общая теория линейных уравнений и систем.
4. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами.
5. Зависимость решений от параметров.
6. Устойчивость по Ляпунову.
7. Автономные системы.
8. Уравнения в частных производных первого порядка.

Прикладные вопросы

Приведем некоторый, далеко не полный, список стандартных объектов, изучаемых в связи с приложениями курса ОДУ к другим дисциплинам.

- Эволюция: остывание тела, вытекание жидкости, взрыв.
- Колебания маятника, колебательный контур, равновесие струны.
- Уравнения Клеро и Эйлера.
- Уравнение Ньютона и гамильтонова система.
- Поворот окружности и обмотка тора.
- Модель Лотки – Вольтерры для системы «хищник – жертва».
- Уравнение Хопфа для одномерного поля скоростей свободных частиц.

Вынужденные сокращения

Из-за недостатка часов следующие части программы зачастую реализуются без подробных доказательств (со ссылкой на другие курсы) или вовсе опускаются (с включением в различные спецкурсы):

- теорема Пеано для уравнения с непрерывной правой частью;
- существование логарифма оператора и теория Флоке – Ляпунова;
- функция Грина краевой задачи;
- теорема Кнезера о колеблющихся решениях;
- теорема о дифференцируемости решений по параметру;
- часть теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению;
- эргодическая теорема Вейля об иррациональном повороте окружности;
- квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.

Формы оценки знаний

Следующие мероприятия призваны проверять, стимулировать и подстраховывать студентов:

1. зачет — в зимнем семестре;
2. экзамен — письменный, годовой (по сумме технических баллов: 3 балла — «удовл.», 7 баллов — «хор.», 10 баллов — «отл.»):
   - коллоквиумы — письменные, за пары глав (максимум 4 балла);
   - контрольная работа — итоговая, из задач по темам семинарских занятий (максимум 5 баллов);
   - поощрительные баллы — за активную работу на семинарах или лекциях (максимум 2 балла);
   - собственно экзамен — по лекциям (максимум 10–12 баллов);
3. кафедральная олимпиада по ОДУ — в апреле (за любое призовое место студент награждается оценкой «отл.»).

Пример задания: олимпиада–2016

Укажите необходимое и достаточное условие на скалярную функцию $u \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R})$, при котором она служит ненулевым решением какого-либо уравнения

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0, \quad p, q \in \mathrm{C}(\mathbb{R}).$$

Пример задания: олимпиада–2016

Укажите необходимое и достаточное условие на скалярную функцию $u \in C^2(\mathbb{R})$, при котором она служит ненулевым решением какого-либо уравнения

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0, \quad p, q \in C(\mathbb{R}).$$

Решение.

1. Необходимое условие — отсутствие у функции u кратных нулей: если в какой-либо точке $t_0 \in \mathbb{R}$ выполнены равенства $u(t_0) = \dot{u}(t_0) = 0$, то решение u — нулевое (в силу единственности).

Пример задания: олимпиада–2016

Укажите необходимое и достаточное условие на скалярную функцию $u \in C^2(\mathbb{R})$, при котором она служит ненулевым решением какого-либо уравнения

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = 0, \quad p, q \in C(\mathbb{R}).$$

Решение.

1. Необходимое условие — отсутствие у функции u кратных нулей: если в какой-либо точке $t_0 \in \mathbb{R}$ выполнены равенства $u(t_0) = \dot{u}(t_0) = 0$, то решение u — нулевое (в силу единственности).

2. Это же условие и достаточно: если при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $u^2(t) + \dot{u}(t)^2 > 0$, то функция u — ненулевое решение уравнения

$$(u^2(t) + \dot{u}(t)^2) \cdot \ddot{y} - (\dot{u}(t)\ddot{u}(t)) \cdot \dot{y} - (u(t)\ddot{u}(t)) \cdot y = 0.$$

Пример задания: экзамен–2011 (3 балла)

Некоторая линейная комбинация функции y и ее производных $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots$ обнуляет ровно две из четырех функций

$$y_1 = \sin t^2, \quad y_2 = \sin^2 t, \quad y_3 = \sin 2t, \quad y_4 = t^2 \sin t.$$

Какие из них она заведомо обнуляет, а какие — заведомо не обнуляет?

Пример задания: экзамен–2011 (3 балла)

Некоторая линейная комбинация функции y и ее производных $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots$ обнуляет ровно две из четырех функций

$$y_1 = \sin t^2, \quad y_2 = \sin^2 t, \quad y_3 = \sin 2t, \quad y_4 = t^2 \sin t.$$

Какие из них она заведомо обнуляет, а какие — заведомо не обнуляет?

Решение.
Речь идет о линейном однородном уравнении с постоянными коэффициентами, которая:

Пример задания: экзамен–2011 (3 балла)

Некоторая линейная комбинация функции y и ее производных $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots$ обнуляет ровно две из четырех функций

$$y_1 = \sin t^2, \quad y_2 = \sin^2 t, \quad y_3 = \sin 2t, \quad y_4 = t^2 \sin t.$$

Какие из них она заведомо обнуляет, а какие — заведомо не обнуляет?

Решение.
Речь идет о линейном однородном уравнении с постоянными коэффициентами, которая:

1. заведомо не обнуляет только нестандартную функцию y_1;

Пример задания: экзамен–2011 (3 балла)

Некоторая линейная комбинация функции y и ее производных $\dot{y}, \ddot{y}, \ldots$ обнуляет ровно две из четырех функций

$$y_1 = \sin t^2, \quad y_2 = \sin^2 t, \quad y_3 = \sin 2t, \quad y_4 = t^2 \sin t.$$

Какие из них она заведомо обнуляет, а какие — заведомо не обнуляет?

Решение.
Речь идет о линейном однородном уравнении с постоянными коэффициентами, которая:

1. заведомо не обнуляет только нестандартную функцию y_1;
2. если обнуляет функцию y_2, то и функцию y_3, а если нет, то обнуляет обе функции y_3 и y_4, поэтому она заведомо обнуляет только функцию y_3.

Пример задания: коллоквиум–III

Верно ли, что если при $x_0 = 0$ решение задачи

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2), \quad x(0) = x_0,$$

определено на всей оси $\mathbb{R}$, то при остальных значениях $x_0 \in \mathbb{R}$ ее решения продолжаются:

1. на единую для них всех достаточно малую окрестность нуля;
2. на отрезок $[-1, 1]$ для всех достаточно малых x_0;
3. на любой конечный интервал для всех достаточно малых x_0;
4. на всю ось $\mathbb{R}$ хотя бы для одного достаточно малого $x_0 \neq 0$?

Пример задания: коллоквиум–III

Верно ли, что если при $x_0 = 0$ решение задачи

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2), \quad x(0) = x_0,$$

определено на всей оси $\mathbb{R}$, то при остальных значениях $x_0 \in \mathbb{R}$ ее решения продолжаются:

1. на единую для них всех достаточно малую окрестность нуля;
2. на отрезок $[-1, 1]$ для всех достаточно малых x_0;
3. на любой конечный интервал для всех достаточно малых x_0;
4. на всю ось $\mathbb{R}$ хотя бы для одного достаточно малого $x_0 \neq 0$?

- Ответы на вопросы 2 и 3 положительны, в силу непрерывности решений по начальным значениям.

Пример задания: коллоквиум–III

Верно ли, что если при $x_0 = 0$ решение задачи

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^2), \quad x(0) = x_0,$$

определено на всей оси $\mathbb{R}$, то при остальных значениях $x_0 \in \mathbb{R}$ ее решения продолжаются:

1. на единую для них всех достаточно малую окрестность нуля;
2. на отрезок $[-1, 1]$ для всех достаточно малых x_0;
3. на любой конечный интервал для всех достаточно малых x_0;
4. на всю ось $\mathbb{R}$ хотя бы для одного достаточно малого $x_0 \neq 0$?

- Ответы на вопросы 2 и 3 положительны, в силу непрерывности решений по начальным значениям.
- Ответы на вопросы 1 и 4 отрицательны: контрпример — уравнение взрыва $\dot{x} = x^2$ с ненулевыми решениями вида $x = 1/(C - t)$.

Задача о кажущемся времени: олимпиада–2009

Подмечено, что переживаемое человеком малое время Δt вблизи некоторого настоящего момента t воспринимается им не как абсолютное время, а как некая величина Δx, равная отношению времени Δt ко всему времени $x(t)$, воспринимаемому этим человеком как пережитому к моменту t. Исходя из этого предположения, составьте дифференциальное уравнение для функции $x(t)$ и решите его.

Задача о кажущемся времени: олимпиада–2009

Подмечено, что переживаемое человеком малое время Δt вблизи некоторого настоящего момента t воспринимается им не как абсолютное время, а как некая величина Δx, равная отношению времени Δt ко всему времени $x(t)$, воспринимаемому этим человеком как пережитому к моменту t. Исходя из этого предположения, составьте дифференциальное уравнение для функции $x(t)$ и решите его.

Решение. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем

$$\Delta x = \frac{\Delta t}{x(t)} \implies \dot{x} = \frac{1}{x} \implies x^2 = \frac{t - C}{2}$$

откуда, с учетом естественного начального условия $x(0) = 0$, имеем

$$x(t) = \sqrt{t/2}.$$

Экспонента матрицы

Профессор А.Ф.Филиппов находил экспоненты матриц второго порядка (используя их сходство с комплексными числами) по правилу:

если собственные числа матрицы A равны $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta$ и $B \equiv A - \alpha E$, то

$$e^A = \begin{cases} e^\alpha \cdot (\operatorname{ch}\beta \cdot E + \dfrac{\operatorname{sh}\beta}{\beta} \cdot B), & \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ e^\alpha \cdot (\cos\gamma \cdot E + \dfrac{\sin\gamma}{\gamma} \cdot B), & \beta = i\gamma \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ e^\alpha \cdot (E + B), & \beta = 0. \end{cases}$$

Экспонента матрицы

Профессор А.Ф.Филиппов находил экспоненты матриц второго порядка (используя их сходство с комплексными числами) по правилу:

если собственные числа матрицы A равны $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta$ и $B \equiv A - \alpha E$, то

$$e^A = \begin{cases} e^\alpha \cdot (\operatorname{ch}\beta \cdot E + \dfrac{\operatorname{sh}\beta}{\beta} \cdot B), & \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ e^\alpha \cdot (\cos\gamma \cdot E + \dfrac{\sin\gamma}{\gamma} \cdot B), & \beta = i\gamma \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ e^\alpha \cdot (E + B), & \beta = 0. \end{cases}$$

Так, в случае $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ он прямо в уме вычислял $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ и

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad e^A = e \cdot \begin{pmatrix} \cos 2 - \sin 2 & 2\sin 2 \\ -\sin 2 & \cos 2 + \sin 2 \end{pmatrix}.$$

О нестрогости формулировок

Вопрос: верно ли утверждение следующей теоремы существования и единственности решения задачи Коши?

Если $f \in \mathrm{C}^1(G)$ для области $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$, то для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ задача

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

имеет единственное решение.

О нестрогости формулировок

Вопрос: верно ли утверждение следующей теоремы существования и единственности решения задачи Коши?

Если $f \in \mathrm{C}^1(G)$ для области $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$, то для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ задача

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

имеет единственное решение.

Ответ: эта формулировка неверна в принципе, поскольку никакое решение данной задачи не может быть единственным (вместе с ним той же задаче будет удовлетворять и его сужение на любую меньшую окрестность начального момента).

Приведенный пример показывает, к чему может привести жаргонный стиль изложения строгой математической дисциплины.

Компактно-открытая топология

Решение $x(t, \mu)$ семейства задач Коши

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad x|_{t_0} = x_0(\mu), \quad f, f'_x, f'_\mu \in \mathrm{C}(G \times \mathrm{M}), \quad x_0 \in \mathrm{C}^1(\mathrm{M}),$$

раскладывается в ряд

$$x(t, \mu + \eta) = x(t, \mu) + x'_\mu(t, \mu)\eta + \alpha(t, \eta)\,|\eta|,$$

Компактно-открытая топология

Решение $x(t,\mu)$ семейства задач Коши

$$\dot{x} = f(t,x,\mu), \quad x|_{t_0} = x_0(\mu), \quad f, f'_x, f'_\mu \in \mathrm{C}(G \times \mathrm{M}), \quad x_0 \in \mathrm{C}^1(\mathrm{M}),$$

раскладывается в ряд

$$x(t,\mu+\eta) = x(t,\mu) + x'_\mu(t,\mu)\eta + \alpha(t,\eta)\,|\eta|,$$

где для любого $\mu \in \mathrm{M}$ на любом компакте $t \in K \subset D(x(\cdot,\mu))$ в некоторой окрестности $\eta \in U(0)$ выполнено условие

$$\lim_{\eta\to 0}\sup_{t\in K}|\alpha(t,\eta)| = 0.$$

Компактно-открытая топология

Решение $x(t,\mu)$ семейства задач Коши

$$\dot{x} = f(t,x,\mu), \quad x|_{t_0} = x_0(\mu), \quad f, f'_x, f'_\mu \in \mathrm{C}(G \times \mathrm{M}), \quad x_0 \in \mathrm{C}^1(\mathrm{M}),$$

раскладывается в ряд

$$x(t,\mu+\eta) = x(t,\mu) + x'_\mu(t,\mu)\eta + \alpha(t,\eta)\,|\eta|,$$

где для любого $\mu \in \mathrm{M}$ на любом компакте $t \in K \subset D(x(\cdot,\mu))$ в некоторой окрестности $\eta \in U(0)$ выполнено условие

$$\lim_{\eta\to 0} \sup_{t\in K} |\alpha(t,\eta)| = 0.$$

Непрерывность функции по паре переменных:

- сильнее, чем непрерывность по каждой переменной;
- слабее, чем непрерывность по одной переменной вместе с равномерной по ней непрерывностью по другой;
- равносильна непрерывности по одной переменной вместе с равномерной на компактах по ней непрерывностью по другой.

Определитель Вронского

Известно, что для любых скалярных функций $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{C}^{n-1}(I)$ на интервале $I \subset \mathbb{R}$ верна импликация

$$f_1, \ldots, f_n \text{ — линейно зависимы} \implies W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = 0, \quad t \in I,$$

а обратная импликация неверна.

Однако,

Определитель Вронского

Известно, что для любых скалярных функций $f_1, \ldots, f_n \in C^{n-1}(I)$ на интервале $I \subset \mathbb{R}$ верна импликация

$$f_1, \ldots, f_n \text{ — линейно зависимы} \implies W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = 0, \quad t \in I,$$

а обратная импликация неверна.

Однако,
если для этих функций верно равенство $W_{f_1,\ldots,f_n}(t) = 0,\ t \in I$:

- и $W_{f_1,\ldots,f_{n-1}}(t) \neq 0,\ t \in I$, то они линейно зависимы;
- и $f_1, \ldots, f_n$ — решения линейного однородного уравнения какого-либо порядка, то они линейно зависимы;
- то существует интервал $J \subset I$, на котором они линейно зависимы.